

早稲田大学 商学部 数学 解答例

①

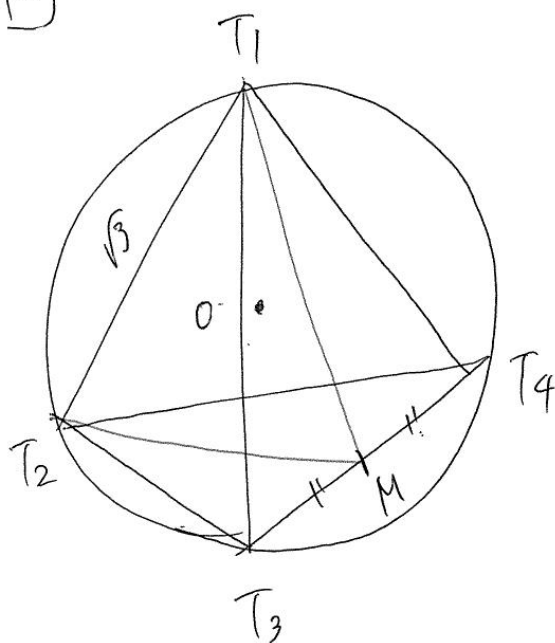
$$(1) \quad n = \boxed{4049}$$

$$(2) \quad r = \boxed{\frac{6}{17}}$$

$$(3) \quad f(x) = \boxed{\frac{1}{5}x^3 - 3x}$$

$$(4) \quad \boxed{\frac{160}{6561}}$$

[2]



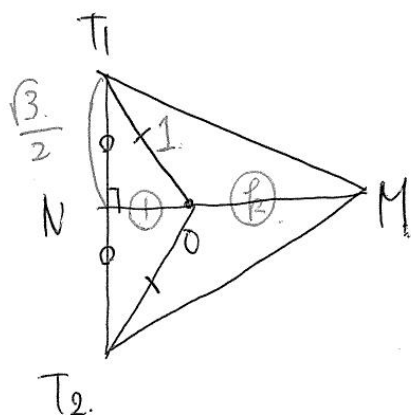
(1)

$$k(\vec{OT_1} + \vec{OT_2}) + \vec{OT_3} + \vec{OT_4} = \vec{0}$$

$$\frac{\vec{OT_3} + \vec{OT_4}}{2} = -\frac{k}{2}(\vec{OT_1} + \vec{OT_2}) \quad (2)$$

$$\vec{OM} = -k \vec{ON}$$

T_1T_2 の中点を N とし



$$OT_1 = OT_2 \text{ より}$$

$\triangle OT_1T_2$ は二等辺三角形より

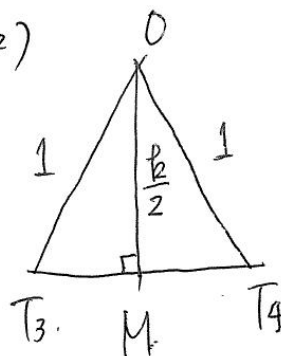
$ON \perp T_1T_2$ である。

$$ON = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$OM = \frac{k}{2} \text{ より}$$

$$NM = \frac{1+k}{2}$$

$$\begin{aligned} \triangle MT_1T_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1+k}{2} \\ &= \frac{k+1}{4}\sqrt{3} \end{aligned}$$



$$T_3M = \sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$$

$$T_3T_4 = \sqrt{4 - k^2}$$

k を固定したとき四角体 $T_1T_2T_3T_4$ の体積が

最大となるのは.

$\triangle T_1 T_2 M \perp T_3 T_4$ のとき.

このとき

$$V(k) = \frac{1}{3} \cdot \frac{k+1}{4} \sqrt{3} \cdot \sqrt{4-k^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{(k+1)^2 (4-k^2)}$$

$$f(k) = (k+1)^2 (4-k^2) \text{ とおす}$$

$$f'(k) = 2(k+1)(4-k^2) + (k+1)^2(-2k)$$

$$= 2(k+1) \{ 4 - k^2 - k(k+1) \}$$

$$= 2(k+1) (-2k^2 - k + 4)$$

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{4} \quad \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$$

k	0		$\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$		2
f'		+	0	-	
f	↓	↗		↘	

$$\underline{k = \frac{-1+\sqrt{33}}{4} \text{ のとき}}$$

最大 ..

3

(1) n^2+n+1 .

(i) $n \equiv 0 \pmod{7}$ とき

$n^2+n+1 \equiv 1 \pmod{7}$ 以下 mod 7

(ii) $n \equiv 1$ とき

$n^2+n+1 \equiv 1$.

(iii) $n \equiv 2$ とき

$n^2+n+1 \equiv 4+2+1 \equiv 7 \equiv 0$.

(iv) $n \equiv 3$ とき

$n^2+n+1 \equiv 9+3+1 \equiv 13 \equiv 6$.

(v) $n \equiv 4$ とき

$n^2+n+1 \equiv 16+4+1 \equiv 21 \equiv 0$

(vi) $n \equiv 5$ とき

$n^2+n+1 \equiv 25+5+1 \equiv 31 \equiv 3$.

(vii) $n \equiv 6$ とき

$n^2+n+1 \equiv 36+6+1 \equiv 43 \equiv 1$.

は

7で割った余りが 2 or 4 である
よ

100番目の n は

$4 + 17 \times 49 = 347$

(2) $91 = 13 \times 7$.

$n = 13k + r$ ($k \in \mathbb{Z}, r = 0, 1, \dots, 12$)
とすると

n^2+n+1

$= (13k+r)^2 + 13k+r+1$

$= 169k^2 + 26kr + r^2 + 13k + r + 1$

$= 13(13k^2 + 2kr + k) + r^2 + r + 1$.

$r = 0, 1, \dots, 12$ 中で

$r^2 + r + 1$ が 13 の倍数になるのは
 $r = 3, 9$ だけ

は 7で割った余りが 2 or 4
か

13で割った余りが 3 or 9

① n は 7 で割って 2 余り
13 で割って 3 余るとき

$$n = 7k + 2$$

$$n = 13l + 3 \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

とおける

$$7k + 2 = 13l + 3$$

$$7k - 13l = 1$$

$$(k, l) = (2, 1)$$

$$7 \cdot 2 - 13 \cdot 1 = 1$$

$$7(k-2) - 13(l-1) = 0$$

$$7(k-2) = 13(l-1)$$

$$k-2 = 13M$$

$$l-1 = 7M \quad (M \in \mathbb{Z})$$

$$\rightarrow (k, l) = (13M+2, 7M+1)$$

$$n = 7 \cdot (13M+2) + 2$$

$$= 91M + 16$$

② n は 7 で割って 2 余り
13 で割って 9 余るとき

$$n = 91M + 9$$

③ n は 7 で割って 4 余り
13 で割って 3 余るとき

$$n = 91M + 81$$

④ n は 7 で割って 4 余り
13 で割って 9 余るとき

$$n = 91M + 14$$

100 番目の自然数は ③ の

$$n = 91M + 81 \text{ の } 917^{\text{th}} \text{ term}$$

25 番目の自然数は

$$81 + 24 \times 91 = \underline{2265}$$