早稲田大学 基幹/創造/先進理工学部 数学 解答例

[I] (1)

$(3x+2)^n = (x^2+x+1)Q(x) + a_n x + b_n$

$3x+2$をかけて

$(3x+2)^{n+1} = (3x+2)(x^2+x+1)Q(x) + (a_n x + b_n)(3x+2)$

$= (3x+2)(x^2+x+1)Q(x) + 3a_n x^2 + (2a_n + 3b_n)x + 2b_n$

$3a_n x^2 + (2a_n+3b_n)x + 2b_n$ を x^2+x+1でわると

商が $3a_n$，余りが $(-a_n+3b_n)x + 2b_n - 3a_n$

であることから

$(3x+2)^{n+1} = (3x+2)(x^2+x+1)Q(x) + 3a_n(x^2+x+1) + (-a_n+3b_n)x + 2b_n - 3a_n$

$= (x^2+x+1)\{(3x+2)Q(x) + 3a_n\} + (-a_n+3b_n)x + 2b_n - 3a_n$

である。よって

$\begin{cases} a_{n+1} = -a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = 2b_n - 3a_n \end{cases}$ (答)

(2) a_nは7でわると3余り

b_nは7でわると2余ること

を数学的帰納法で示す。

(I) $a_1=3,\ b_1=2$ より

$n=1$ のとき成立する

(II) $\begin{cases} a_k = 7M+3 \\ b_k = 7L+2 \end{cases}$

と仮定する。$(M, L \in \mathbb{Z})$

$$a_{k+1} = -a_k + 3b_k$$
$$= -(7M+3) + 3(7L+2)$$
$$= 7(-M+3L) + 3$$

$$b_{k+1} = 2b_k - 3a_k$$
$$= 2(7L+2) - 3(7M+3)$$
$$= 7(2L-3M-1) + 2$$

よって $n=k+1$ のときも成立

(I)(II)よりすべての自然数 n で成立する。

(3) $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{7}(2a_{n+1} - 3b_{n+1}) \\ b_n = \dfrac{1}{7}(3a_{n+1} - b_{n+1}) \end{cases}$

a_n と b_n が互いに素になること

を数学的帰納法で示す。

(I) $a_1=3,\ b_1=2$ は互いに素であるので $n=1$ のとき成立

(II) a_k と b_k が互いに素であるとする。

a_{k+1} と b_{k+1} も互いに素でないとすれば(2)より、7以外の素数 P を公約数にもつ。

$\begin{cases} a_{k+1} = PK \\ b_{k+1} = PN \quad (K, L \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

であると書ける。

$$a_k = \frac{1}{7}(2 \cdot PK - 3 \cdot PN)$$
$$= \frac{P}{7}(2K - 3N)$$

$$b_k = \frac{1}{7}(3PK - PN)$$
$$= \frac{P}{7}(3K - N)$$

$\frac{p}{q}$は整数でないので

a_k, b_kが整数であることに反する。

よって、a_kとb_kが互いに素のとき、a_{k+1}とb_{k+1}は互いに素である。

(I)(II)より、a_nとb_nは互いに素である。

[II]

(1) 最初のk回が全て赤、残りのn−k回全て白のときの確率aは

$$1 \quad 2 \quad \cdots \quad k \quad \cdots\cdots \quad n$$

赤 赤 　 赤 白 　 白

$$a=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{k}{k+1}\times\frac{1}{k+2}\times\frac{2}{k+3}\times\cdots\times\frac{n-k}{n+1}$$

$$=\frac{1}{k+1}\times\frac{(n-k)!}{(k+2)\cdots(n+1)}$$

$$=\frac{(n-k)!\,k!}{(n+1)!}$$

赤k個、白n−k個の並べ方は ${}_nC_k$ 通り。赤白の順番によらず、確率は同じである。

$$P_n(k)={}_nC_k\times a$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!\,k!}{(n+1)!}$$

$$=\underline{\frac{1}{n+1}}\,/\!/$$

$$\underline{P_1(k)=\frac{1}{2},\ P_2(k)=\frac{1}{3}}$$

(2)

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad k \quad \cdots \quad n$$

$$\text{黒}\ \xrightarrow[\text{黒}]{\qquad\qquad}\ \text{赤}\ \xleftarrow[\text{黒}]{\qquad}\ \text{黒}$$

$$Q_n(k)=\frac{b}{r+b}\times\frac{b+1}{r+b+1}\times\cdots\times\frac{b+k-2}{r+b+k-2}\times\frac{r}{r+b+k-1}\times\frac{b+k-1}{r+b+k}\times\cdots\times\frac{b+n-2}{r+b+n-1}$$

$$=\frac{(r+b-1)!\,\cancel{(b+k-2)!}\,r\,(b+n-2)!}{(r+b+n-1)!\,(b-1)!\,\cancel{(b+k-2)!}}$$

$$= \frac{(r+b-1)!\, r\,(b+n-2)!}{(r+b+n-1)!\,(b-1)!}$$

はkによらず一定。

[III] (1) $f(x)=e^{x-2}$ について.

$y=e^{x-2}$

$\Leftrightarrow x-2=\log y$

$\Leftrightarrow x=\log y+2$

x と y を入れかえて

$y=\log x+2$.

よって $f(x)$ の逆関数が

$y=\log x+2=g(x)$ で

あるので題意は示された。

(2) $y=e^{x-2}$ と $y=x$ を連立

して. $e^{x-2}=x$

$\Leftrightarrow e^{x-2}-x=0$

$h(x)=e^{x-2}-x$ とおく.

$h'(x)=e^{x-2}-1$.

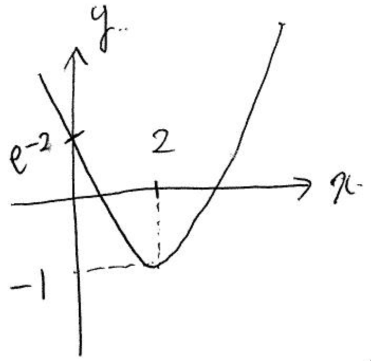
$h'(x)=0$ を解くと

$x-2=0$

$x=2$.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
h'	$-$	0	$+$
h	$\searrow$		$\nearrow$

$h(2)=-1$.



$\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to\infty} e^{x-2}\left(1-\dfrac{x}{e^{x-2}}\right)$

$=\infty$

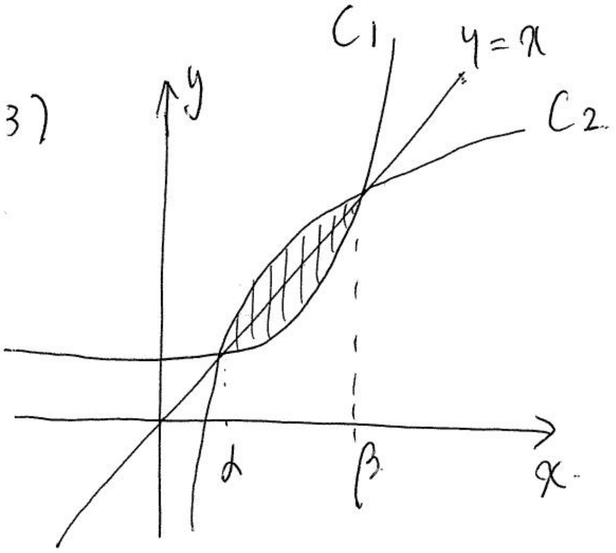
$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\infty$.

以上より $h(x)=0$ の実数解

は2コあり, $y=x$ と C_1 は

2点で交わる。//

(3)



(4) C_1とC_2が$y=x$に関して線対称であることを利用する。

$$S = 2\int_{\alpha}^{\beta}(x - e^{x-2})\,dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}x^2 - e^{x-2}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\beta^2 - e^{\beta-2} - \frac{1}{2}\alpha^2 + e^{\alpha-2}\right)$$

ここで α, βは

$$\begin{cases} \alpha = e^{\alpha-2} \\ \beta = e^{\beta-2} \end{cases}$$ をみたす

ので

$$S = \underline{\beta^2 - \alpha^2 - 2\beta + 2\alpha}$$

[IV]

(1) $z=1$ のとき $w=\underset{\sim\sim}{3}$

$z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき

$$w=\frac{3}{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}=\underline{\frac{3}{2}(1-\sqrt{3}i)}$$

$z=\sqrt{3}i$ のとき $w=\dfrac{3}{\sqrt{3}i}=\underset{\sim\sim}{-\sqrt{3}i}$

(2) αz

$$=\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\left((1-t)+t\sqrt{3}i\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(3(1-t)+3\sqrt{3}ti-\sqrt{3}i(1-t)+3t\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(3+(4\sqrt{3}t-\sqrt{3})i\right)$$

αz の実部は $\underset{\sim\sim}{\frac{3}{2}}$

$$(w-\alpha)(\overline{w-\alpha})$$

$$=|w-\alpha|^2$$

$$=\left|\frac{3}{z}-\alpha\right|^2$$

$$=\frac{|3-\alpha z|^2}{|z|^2}$$

$$=\frac{\left|\frac{3}{2}-\frac{4\sqrt{3}t-\sqrt{3}}{2}i\right|^2}{(1-t)^2+3t^2}$$

$$=\frac{\frac{9}{4}+\frac{(4\sqrt{3}t-\sqrt{3})^2}{4}}{4t^2-2t+1}$$

$$=\frac{12t^2-6t+3}{4t^2-12t+1}$$

$$=\underset{\sim\sim}{3}$$

(3) $0\leq t\leq 1$ とすると

zは線分AB上を動く。

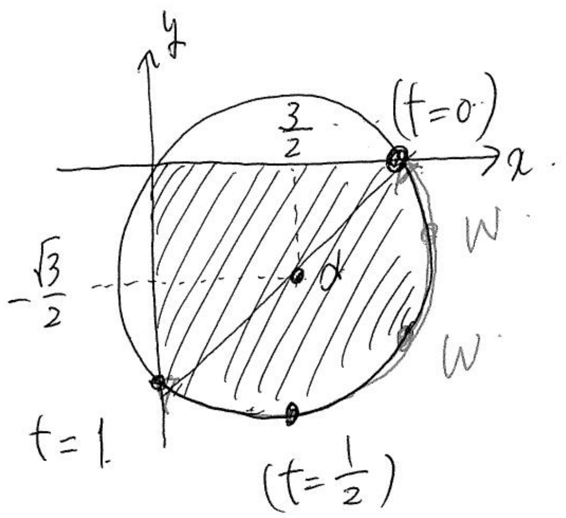
$|w-\alpha|=\sqrt{3}$ より

点wは中心α, 半径$\sqrt{3}$の円を描く。

(1)で求めた 3つのW

$W=3,\ \frac{3-3\sqrt{3}i}{2},\ -\sqrt{3}i$ が

$t=0,\ \frac{1}{2},\ 1$ に対応する



以上より、線分Lの通過領域は図の斜線部

面積は

$\frac{1}{2}\sqrt{3}^2\pi + \frac{1}{2}3\cdot\sqrt{3}$

$=\frac{3\pi+3\sqrt{3}}{2}$ //

[V]

(1) $\overrightarrow{AB}=(-2,\ 2,\ -2)$

$\overrightarrow{AC}=(-2,\ -4,\ -2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4-8+4=0$

$\angle BAC=\underline{90^\circ}$

(2) 直線 AB 上の点 P は

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

$=(2,1,2)+t\overrightarrow{AB}$

$=(2-2t,\ 1+2t,\ 2-2t)$

$x=h$ のとき　$2-2t=h$

$t=\dfrac{2-h}{2}$

このとき　$P(h,\ 3-h,\ h)$

直線 AC 上の点 Q は

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AC}$

$=(2,1,2)+(-2s,-4s,-2s)$

$=(2-2s,\ 1-4s,\ 2-2s)$

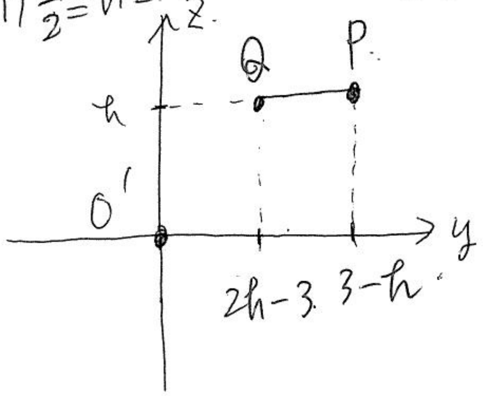
$x=h$ のとき　$2-2s=h$

$s=\dfrac{2-h}{2}$

$Q(h,\ 2h-3,\ h)$

$x=h$ において $O'(h,0,0)$ とおく。

(i) $\dfrac{3}{2}\leqq h\leqq 2$ のとき



このとき

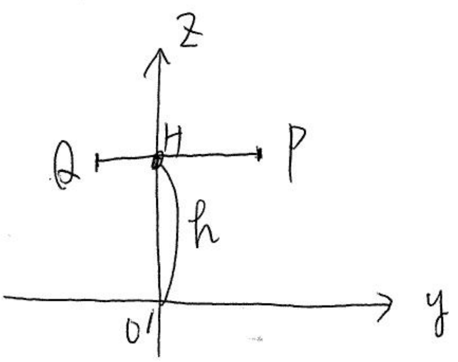
O' と線分 PQ のキョリは

$O'Q=\sqrt{(2h-3)^2+h^2}=\sqrt{5h^2-12h+9}$

(ii) $0\leqq h\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

O' と線分 PQ のキョリは

$O'H=h$

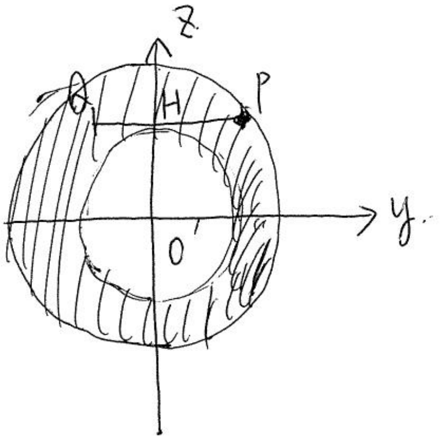


O'と線PQのキョリ

$$\begin{cases} \sqrt{5h^2-12h+9} & \left(\frac{3}{2} \leqq h \leqq 2\right) \\ h & \left(0 \leqq h \leqq \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

(4)

(i) $0 \leqq h \leqq \frac{3}{2}$ のとき



$HQ = 3-2h$. $HP = 3-h$

$HP-HQ = 3-h-(3-2h)$
$= h > 0$

よって、$HP > HQ$

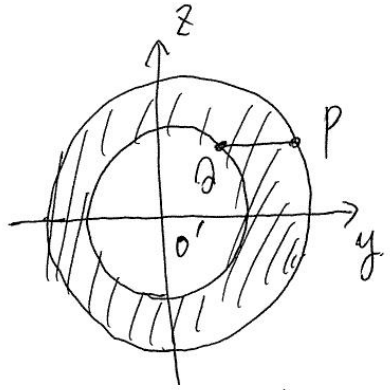
よって、$O'P > O'Q$

線分QPをO'のまわりに回転したときの通過領域の面積 $S_1(h) = \pi(O'P^2 - O'H^2)$

$= \pi PH^2$

$= \pi(3-h)^2$

(ii) $\frac{3}{2} \leqq h \leqq 2$ のとき



線分QPをO'のまわりに回転したときの通過領域の面積

$S_2(h) = \pi(O'P^2 - O'Q^2)$

$= \pi\left((3-h)^2 + h^2 - (5h^2-12h+9)\right)$

$= \pi(-3h^2+6h)$

$$V = \int_0^{\frac{3}{2}} S_1(h)\,dh + \int_{\frac{3}{2}}^{2} S_2(h)\,dh$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \pi(3-h)^2\,dh + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \pi(-3h^2+6h)\,dh$$

$$= -\frac{\pi}{3}\Big[(3-h)^3\Big]_0^{\frac{3}{2}} + \pi\Big[-h^3+3h^2\Big]_{\frac{3}{2}}^{2}$$

$$= \frac{17}{2}\pi$$