早稲田大学 基幹/創造/先進理工学部 数学 解答例

[I]

$f(x) = 3e^x - 6$

$g(x) = e^{2x} - 4e^x$

$g'(x) = 2e^{2x} - 4e^x$

$= 2e^x(e^x - 2)$

$g'(x) = 0$ を解くと

$x = \log 2$

x		$\log 2$	
g'	$-$	0	$+$
g	↘	-4	↗

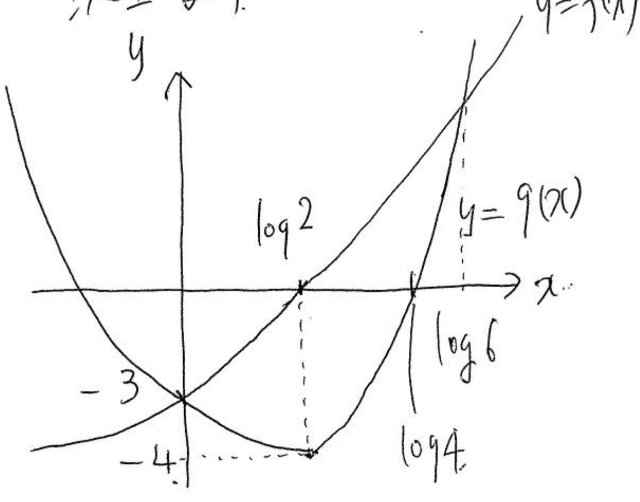
$g(\log 2) = e^{\log 4} - 4e^{\log 2}$

$= 4 - 8 = -4$

$f(x) = 0$ を解くと

$e^x = 2 \iff x = \log 2$

以上より



$f(x) = g(x)$

$\iff 3e^x - 6 = e^{2x} - 4e^x$

$\iff e^{2x} - 7e^x + 6 = 0$

$\iff (e^x - 6)(e^x - 1) = 0$

$\therefore e^x = 1, 6$

$x = 0, \log 6$

(2)

$S = \int_0^{\log 6} \{(3e^x - 6) - (e^{2x} - 4e^x)\} dx$

$= \int_0^{\log 6} (-e^{2x} + 7e^x - 6) dx$

$= \left[-\frac{1}{2}e^{2x} + 7e^x - 6x \right]_0^{\log 6}$

$= -\frac{1}{2}e^{\log 36} + 7e^{\log 6} - 6\log 6$

$- \left(-\frac{1}{2} + 7 \right)$

$= -18 + 42 - 6\log 6 - \frac{13}{2}$

$= \underline{-6\log 6 + \frac{35}{2}}$

(3) $f(x) = -g(x)$

$\Leftrightarrow 3e^x - 6 = -e^{2x} + 4e^x$.

$\Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (e^x - 3)(e^x + 2) = 0$

$e^x = 3$.

$x = \log 3$.

$$V = \pi\int_0^{\log 3}(g(x))^2\,dx + \pi\int_{\log 3}^{\log 6}(f(x))^2\,dx$$
$$- \pi\int_0^{\log 2}(f(x))^2\,dx - \pi\int_{\log 4}^{\log 6}(g(x))^2\,dx.$$

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\log 3}(e^{4x} - 8e^{3x} + 16e^{2x})\,dx$$
$$+ \int_{\log 3}^{\log 6}(9e^{2x} - 36e^x + 36)\,dx$$
$$- \int_0^{\log 2}(9e^{2x} - 36e^x + 36)\,dx.$$
$$- \int_{\log 4}^{\log 6}(e^{4x} - 8e^{3x} + 16e^{2x})\,dx.$$

$= 36$

$\therefore$ $V = 36\pi$

$e^x = t$ とおいてもよい.

$$\frac{V}{\pi} = \int_1^3(t^4 - 8t^3 + 16t^2)\frac{dt}{t}$$
$$+ \int_3^6(9t^2 - 36t + 36)\frac{dt}{t}$$
$$- \int_1^2(9t^2 - 36t + 36)\frac{dt}{t}$$
$$- \int_4^6(t^4 - 8t^3 + 16t^2)\frac{dt}{t}$$

$= 36$.

[Ⅱ] $f(x)=0$ の1つの整数解をαとして、もう1つの解をβとする。

$f(x)=x^2+bx+c$ とおくと、bは整数で、解と係数の関係から、$\alpha+\beta=-b$

$$\beta=-b-\alpha$$

よって、βも整数。

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$とおける。

$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)=pq$

より、

$(\alpha-1)(\beta-1)=pq$である。

$\alpha-1, \beta-1$はpqの約数である。

$(\alpha-1, \beta-1)=(\pm1, \pm pq)$ ㋐ $(\pm p, \pm q)$ ㋑

$(\pm q, \pm p)$ ㋒ $(\pm pq, \pm1)$ ㋓

である。$p \cdot q$の正の約数は$1, p, q, pq$であることを考慮した。(複号同順)

$$f(x)=(x-2)(x-(pq+1)) = x\cdot(x-(-pq+1))$$ ㋐

$$f(x)=(x-(p+1))(x-(q+1)) = (x-(-p+1))(x-(-q+1))$$ ㋑

(㋐と㋓, ㋑と㋒は同じものが得られる。)

(2) $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\cdot f_4(x)=0$ の解は、

$2, pq+1, 0, -pq+1,$
$p+1, q+1, -p+1, -q+1$

合計は

$2+pq+1+0-pq+1$
$+p+1+q+1-p+1-q+1$
$=8$

はp, qによらない。//

[Ⅲ]

(1) $b_{n+1} - \frac{7}{6} = \frac{1}{2}\left(b_n - \frac{7}{6}\right)$

と変形できる。

$b_n - \frac{7}{6} = \left(r - \frac{7}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\lim_{n \to \infty} b_n = \frac{7}{6}$

$c_{n+1} - \frac{5}{3} = \frac{1}{2}\left(c_n - \frac{5}{3}\right)$

と変形できる。

$c_n - \frac{5}{3} = \left(r - \frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\lim_{n \to \infty} c_n = \frac{5}{3}$

(2) 数学的帰納法で示す。

(Ⅰ) $a_1 = b_1 = c_1 = r$ より

$b_1 \leqq a_1 \leqq c_1$ が成立

(Ⅱ) $n = k$ のとき

$b_k \leqq a_k \leqq c_k$ が成立

するとする。

$$a_{k+1} = \frac{[a_k]}{4} + \frac{a_k}{4} + \frac{5}{6}$$

$$\geqq \frac{a_k - 1}{4} + \frac{a_k}{4} + \frac{5}{6}$$

$$= \frac{a_k}{2} + \frac{7}{12}$$

$$\geqq \frac{b_k}{2} + \frac{7}{12}$$

$$= b_{k+1}$$

$$a_{k+1} = \frac{[a_k]}{4} + \frac{a_k}{4} + \frac{5}{6}$$

$$\leqq \frac{a_k}{4} + \frac{a_k}{4} + \frac{5}{6}$$

$$= \frac{a_k}{2} + \frac{5}{6}$$

$$\leqq \frac{c_k}{2} + \frac{5}{6}$$

$$= c_{k+1}$$

$n = k+1$ のときも成立

(Ⅰ)(Ⅱ) よりすべての自然数 n で $b_n \leqq a_n \leqq c_n$ である。

(3) (1)(2) より十分大きな n に対して $[a_n] = 1$ とできる。

$$a_{n+1} = \frac{[a_n]}{4} + \frac{a_n}{4} + \frac{5}{6}$$

$$= \frac{a_n}{4} + \frac{13}{12}$$

$$a_{n+1} - \frac{13}{9} = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{13}{9}\right)$$

と変形できる。

$$a_n - \frac{13}{9} = \left(r - \frac{13}{9}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{13}{9}$$

IV Aの体積を $V(A)$ で表す.

$V_2 = V(B_1 \cup B_2)$

$= V(B_1) + V(B_2) - V(B_1 \cap B_2)$

$= 2X - Y$ $\underline{(2, 0, -1)}$

$V_3 = V(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$

$= V(B_1) + V(B_2) + V(B_3)$

$- \{V(B_1 \cap B_2) + V(B_2 \cap B_3) + V(B_3 \cap B_1)\}$

$+ V(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$

$= 3X - 3Y + Z$ $\underline{(3, -3, 1)}$

$V_6 = V(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6)$

$-$ ($B_1 \sim B_6$ のうち相異なる2つの共通部分の体積の合計)

$-$ ($B_1 \sim B_6$ のうち相異なる3つの共通部分の体積の合計)

※

$= 6X - ({}_6C_2 - 3)Y - 2^3 Z$

$= 6X - 12Y - 8Z$

※ B_1 と B_6, B_2 と B_5, B_3 と B_4 の場合は各々体積0であるので3つ除く.

$\underline{(6, -12, 8)}$.

(2) 四角錐 $P_6 - P_2P_3P_4P_5$ について体積を考える。

B_1 の半径 r とする.

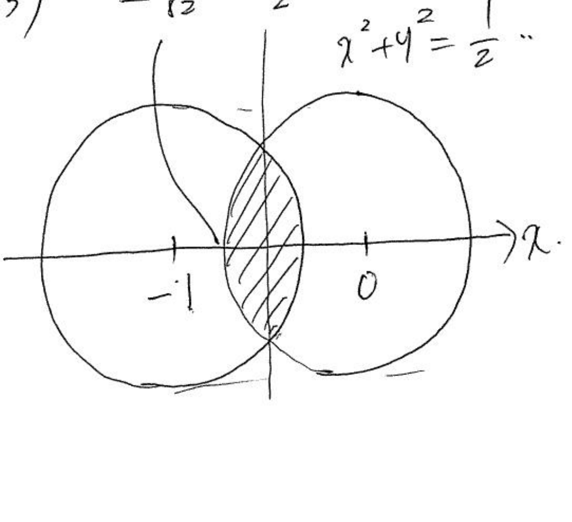
$\frac{1}{3}(\sqrt{3}+1)^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$

$= \frac{1}{3} r \left(4 \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)^2 \sin 60^\circ + (\sqrt{3}+1)\right)$

より $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$X = \frac{4}{3}\pi r^3 = \underline{\frac{\sqrt{2}}{3}\pi}$

(3)



図の斜線部の x軸について
回したときの立体の体積が…
Yである…

$$Y = 2\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{2}} \pi\left(\frac{1}{2} - x^2\right)dx$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{12}\right)\pi.$$

$$V_2 = 2X - Y$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi - \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{12}\right)\pi$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{5}{12}\right)\pi.$$

[V] $\log\frac{1}{x} = t$ とおくと

(1) $\frac{1}{x} = e^{t}$ $x = e^{-t}$

$x \to +0$ のとき $t \to \infty$.

$$f(x) = x^{a}\log x$$
$$= e^{-at}(-t)$$
$$\underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(2) $f'(x) = x^{a-1}(a\log x + 1)$

$f''(x) = x^{a-2}(a^2\log x - a\log x - 1 + 2a)$

$a^2\log x - a\log x - 1 + 2a = 0$

$\Leftrightarrow a(a-1)\log x = 1 - 2a$.

$a = 1$ のとき成立しない.

$a \neq 1$ のとき.

$\log x = \frac{1-2a}{a(a-1)} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1-2a}{a(a-1)}}$

$f\left(e^{\frac{1-2a}{a(a-1)}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{1-2a}{a(a-1)}}\right)^{a}\frac{1-2a}{a(a-1)} = 0$

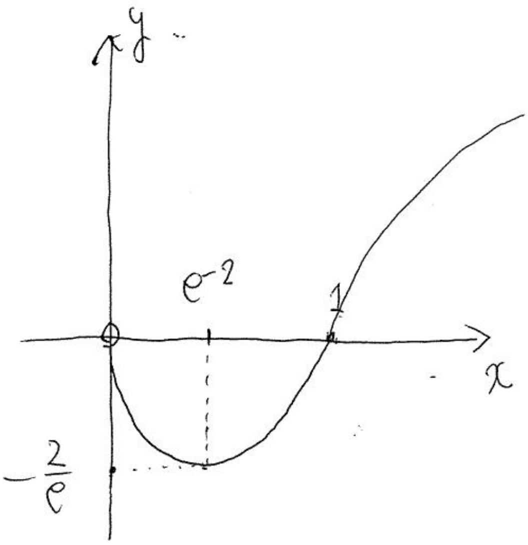
$\therefore a = \frac{1}{2}$ のとき.

$f(x) = \sqrt{x}\log x$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\log x + 1\right)$

$f''(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(-\frac{1}{2}\log x\right)$.

x	0		e^{-2}		1	
f'		$-$	0	$+$		$+$
f''		$+$		$+$	0	$-$
f		↘	$-\frac{2}{e}$	↗	0	↗



(3) $(t,\ t^a\log t)$ における
接線の方程式

$$y - t^a\log t = t^{a-1}(a\log t+1)(x-t)$$

$$y = t^{a-1}(a\log t+1)x - t^a(a\log t+1) + t^a\log t$$

$$y = t^{a-1}(a\log t+1)x + t^a\log t(1-a) - t^a$$

$$t^a(\log t)(1-a) - t^a < 0$$

$$\Leftrightarrow (\log t)(1-a) < 1$$

(i) $a=1$ のとき 任意の正の数 t で成立

(ii) $0<a<1$ のとき

$$\log t < \frac{1}{1-a} \Leftrightarrow t < e^{\frac{1}{1-a}}$$

(iii) $a>1$ のとき

$$\log t > \frac{1}{1-a} \Leftrightarrow t > e^{\frac{1}{1-a}}$$

$g(a) = e^{\frac{1}{1-a}}$ とおく

$$g'(a) = \frac{1}{(1-a)^2}e^{\frac{1}{1-a}} > 0$$

$$g''(a) = \frac{3-2a}{(1-a)^4}e^{\frac{1}{1-a}}$$

a	0		1		$\frac{3}{2}$	
g'		+		+		+
g''		+		+		−
g		↗		↗	e^{-2}	↗

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{-2}$$

$$\lim_{a\to\infty} g(a) = 1$$

$$\lim_{a\to 1-0} g(a) = \infty$$

$$\lim_{a\to 1+0} g(a) = 0$$